❖医学物理与工程学

CT image reconstruction algorithm based on alternative projection

HAN *Yongxin**, WANG *Jian*, LIU *Li*, PANG *Yanwei*
(*Department of Electronic Information Engineering, Tianjin University, Tianjin* 300000, *China*)

[**Abstract**] **Objective** To explore the feasibility of CT image reconstruction algorithm based on alternative projection. **Methods** A convex set optimization problem changed CT image reconstruction, which decomposed reconstruction model into multiple restraints and determined the corresponding convex sets. Alternative projection was used to find the solution in the intersection of the convex sets. To solve the convex set constructed by total variation (TV) prior constrains, epigraph set of the TV function was defined, and continuous projection of point to the tangential hyper-planes of the epigraph set was used to find the nearest point of the start point to the TV convex set. Chambolle-Pock for TV minimization (CPTV), TV projection onto convex set (TV-POCS) and the reconstruction algorithm based on alternative projection were used to reconstruct Shepp-Logan head image respectively, and root mean square error (RMSE) of reconstructed images obtained by different angles' projection images was compared. TV-POCS and the reconstruction algorithm based on alternative projection were used to reconstruct mouse vertebra cross section image respectively, and normalized mean square distance (d) and normalized mean absolute distance (r) of two reconstruction algorithms were compared. **Results** The image reconstructed by CPTV had poorer smoothness and more artifacts. TV-POCS and the reconstruction algorithm based on alternative projection not only suppressed the noise effectively, but also protected the edge of image, which obtained higher image quality. RMSE of the reconstruction algorithm based on alternative projection declined faster than those of other two algorithms, and it had smaller convergence value. The d value and r value of the reconstruction algorithm based on alternative projection were both smaller than TV-POCS (0.064 0 vs 0.262 4, 0.073 7 vs 0.298 2). **Conclusion** For limited angle projection images, the reconstruction algorithm based on alternative projection can obtain higher image quality and faster convergence speed without parameter estimation.

[**Key words**] Tomography, X-ray computed; Image reconstruction; Alternative projection
DOI:10.13929/j.1003-3289.2016.10.030

基于交替投影的 CT 图像重建算法

韩永欣*,王 建,刘 立,庞彦伟
(天津大学电子信息工程学院,天津 300000)

[摘 要] **目的** 探讨基于交替投影的 CT 图像重建算法的可行性。**方法** 将 CT 图像的重建转化为凸集优化问题,将重建模型分解为多个约束,并确定其对应的凸集,通过交替投影的方式在其交集中找到可行解。对 TV 先验项构成的凸集的求解,通过定义 TV 函数的上方图集,利用点到这个凸集的切向超平面的连续投影,找到起始点到 TV 凸集最近的点。分别采用 CPTV 算法、TV-POCS 算法和基于交替投影的 CT 图像重建算法对 Shepp-Logan 头部图像进行重建,比较不同算法对不同角度投影图像重建后的均方根误差(RMSE)。分别采用 TV-POCS 算法和基于交替投影的 CT 图像重建

[**基金项目**] 国家自然科学基金青年项目(61002030)。
[**第一作者**] 韩永欣(1991—),女,河北邢台人,在读硕士。研究方向:CT 图像重建算法研究。
[**通信作者**] 韩永欣,天津大学电子信息工程学院,300000。E-mail: hanyongxin@tju.edu.cn
[**收稿日期**] 2016-03-14 [**修回日期**] 2016-06-30

算法对小鼠脊椎轴位图像进行重建，比较两种算法的归一化均方距离(d)和归一化平均绝对距离(r)。**结果**　CPTV 算法所重建的图像平滑性较差，伪影较多，而 TV-POCS 算法和基于交替投影的重建算法不仅有效抑制了噪声，还保护了图像的边缘，图像质量较高。基于交替投影的重建算法的 RMSE 比另外两种算法下降速度更快，收敛值更小。基于交替投影的重建算法重建图像的 d 和 r 值均小于 TV-POCS 算法(0.064 0 vs 0.262 4，0.073 7 vs 0.298 2)。**结论**　采用基于交替投影的重建算法重建有限角度的 CT 投影图像不需参数估计，且图像质量更高，收敛速度更快。

[**关键词**]　体层摄影术，X 线计算机；图像重建；交替投影

[**中图分类号**]　R814.42　　[**文献标识码**]　A　　[**文章编号**]1003-3289(2016)10-1592-05

CT 成像时为减少患者所接受 X 线的剂量，只能获得有限角度的投影数据。总变分(total variation，TV)正则化 CT 图像重建方法的提出为有限角度投影数据重建提供了一种有效可行的解决方案[1-6]，其中包括基于 TV 函数的原始对偶(Chambolle-Pock for TV minimization，CPTV)算法[7]和基于 TV 最小化的凸集投影重建(TV projection onto convex set，TV-POCS)算法最具代表性[8]。CPTV 算法是基于 TV 函数，通过 CPTV 算法找到距离起始点的梯度范数距离最小的点，收敛速度较慢。TV-POCS 算法通过凸集投影(projection onto convex set，POCS)和梯度最速下降两部分交替完成，提高了图像重建的效率，但 TV 正则化项的梯度下降过程依赖于梯度下降步长的经验选择，无法统一应用于不同类型的投影数据。针对该问题，本文提出一个基于交替投影的 CT 图像重建算法，并探讨其可行性。

1　原理与方法

1.1　CT 图像重建模型　X 线成像过程可用简单的线性模型表示：

$$p = Mx + e \tag{1}$$

其中 p 为投影数据向量，$p \in R^M$；M 为系统矩阵，$M \in R^{M\times N}$；x 为原图像矩阵向量化后得到的 N 维向量，$x \in R^N$；e 为噪声向量，$e \in R^M$。有约束 CT 图像重建可表示为以下最优化问题：

$$x = \arg\min_x \| x \|_{TV} \tag{2}$$

$$\| Mx - p \|^2 \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

$$x \geqslant 0 \tag{4}$$

公式(2)满足(3)和(4)；其中符号 $\| \cdot \|^2$ 表示数据的 L_2 范数，$\| \cdot \|_{TV}$ 表示数据的 TV 函数，以下均表示为 TV(x)。

1.2　交替投影法　交替投影法用于计算一些凸集交集中的点[9]，采用分别向闭凸集上做正交投影获得下一个迭代点，从而找出闭凸集交集的逼近点或到闭凸集的最小距离。基于上述思路，本文将公式(2)转化为 1 个凸集，采用 POCS 方法找到落在有界 TV 约束、有界数据一致性约束和非负约束这 3 个凸集交集的可行解。

若设 x^* 为最优解，则公式(2)中 TV 函数的最小化相当于找到 $TV(x^*) = \min(TV(x))$ 的解，获得有界 TV 函数约束，其中 τ 值取先验图像的 TV 值：

$$\| x \|_{TV} \leqslant \tau \tag{5}$$

3 个约束公式(3)、(4)和(5)构成的集合均为存在于 N 维希尔伯特空间的凸集，故 CT 图像重建就相当于寻找存在于 3 个凸集交集中的公共解。

1.3　基于 TV 的凸集约束　在 N 维空间给定 1 个起始点向量 $v(v \in R^N)$，要满足 TV 约束，该点需向公式(5)表示的集合上进行投影，找到距离这个集合最近的点，即

$$x = \operatorname{argmin} \| x - v \|^2 \tag{6}$$

其中 x 满足约束条件：

$$TV(x) \leqslant \tau \tag{7}$$

TV 函数常用的定义形式为：

$$TV_1(x) = \sum_i \sum_j \sqrt{(x_{i,j} - x_{i+1,j})^2 + (x_{i,j} - x_{i,j+1})^2} \tag{8}$$

其中 i 表示行，j 表示列。这种计算形式较复杂，本文采用其简单计算形式[10]：

$$TV_2(x) = \sum_i \sum_j (| x_{i,j} - x_{i+1,j} | + | x_{i,j} - x_{i,j+1} |) \tag{9}$$

可获得另一个凸集为：

$$TV_2(x) \leqslant \tau \tag{10}$$

若公式(8)表示的集合为 φ_1，公式(9)表示的集合为 φ_2，数学上可推导出 φ_1 是 φ_2 的子集，故 $TV_2(x)$ 约束可代替 $TV_1(x)$ 约束。

对于这种各向异性的 TV 函数，采用 TV 上图集投影[11](projections onto the epigraph set of the TV function，PES-TV)算法，此算法通过定义 TV 函数的上图集：

$$C_{TV} = \{ y = [x^T \ \ \tau]^T : \tau \geqslant TV(x) \} \tag{11}$$

其中 x^T 是向量 x 的共轭向量，在此向量末尾添加

τ值得到 N+1 维向量 y。定义 $TV(x)\leqslant\tau$,则由向量 y 构成凸集 C_{TV} 。由初始图像 v 向凸集 C_{TV} 上进行投影,为获得距离 C_{TV} 最近的点 x^*,得到最小化目标函数为:

$$y^*=[x^*\ \ TV(x^*)]=\arg\min_{y\in C_{TV}}(\|x-v\|^2+TV(x)^2)\tag{12}$$

公式(12)这一函数的最小化是由起始点 v 不断向凸集的切向超平面进行投影,投影过程中起始点到 TV 凸集的距离不断变小,但到达 x^* 附近时,距离会由小变大,可据此找到 x^*,即找到起始点 v 到 TV 凸集最近的点 x^*. 。

对于以上获得的 3 个凸集,公式(3)向量 x 的投影表示点 x 从 N 维空间投影到 M 维空间,并且到 M 维空间中所有超平面的总欧式距离不超过$\sqrt{\varepsilon}$,可理解为在 M 维空间,投影的构成是半径为$\sqrt{\varepsilon}$的 L_2 范数球;公式(4)相当于数轴上限制在正象限的非负约束;公式(10)的 $TV_2(x)$ 约束,表示图像梯度 L_1 范数值是在半径为τ的 L_1 范数球内。假设公式(3)、(4)和(10)构成的集合分别为 C_1、C_2、和 C_3,这个问题的可行解就落在 3 个集合的交集中,即 $C_0=C_1\cap C_2\cap C_3$ 。从任何点开始投影,可行解就是距离这个起始点有最小欧氏距离的集合 C_0 上的点。该解可通过 POCS 方法获得,即在集合 C_1、C_2 和 C_3 上进行交替投影获得。如果集合 C_0 非空,序列可弱收敛到集合 C_0 上的一点,或强收敛到有限维空间[12]。

1.4　基于交替投影的重建算法　基于交替投影的重建算法具体迭代步骤为:

(1)初始化重建参数:假设待重建图像向量初始值为 $f(0)=0$,迭代计数表示为 n,其初始值为 0。

(2)迭代:采用代数重建法(algebra reconstruction technique, ART)进行数据一致项投影[13],获得迭代后图像:

$$f^{(n+\frac{1}{3})}=f^{(n)}+\frac{1}{\|m_i\|^2}(p_i-m_if^{(n)})\ m_i^T$$

其中 m_i 为投影矩阵 M 第 i 行数据, p_i 为第 i 个投影值。

(3)对获得的图像进行正约束:

$$f^{(n+\frac{2}{3})}=\begin{cases}f^{(n+\frac{1}{3})}, f^{(n+\frac{1}{3})}\geqslant 0\\ 0,\quad f^{(n+\frac{1}{3})}<0\end{cases}$$

(4)执行 PES-TV 算法。将 $f^{(n+\frac{2}{3})}$ 作为输入图像 x_0,正交投影到凸集 C_{TV}上,具体迭代过程为:

①计算在空间 R^{N+1} 上的 $TV(x_0)$ 值和在 $y_1=[x_0^T\ TV(x_0)]^T$ 点处的法线,获得在点 y_1 处的超平面方程组,再将向量 $y_0=[x_0^T 0]$ 投影到超平面上,获得第一个估计值 w_0。

②将 w_0 向量的最后一个值置为 0,则投影到凸集 C_{TV}上。同步骤①计算向量 w_0 的 TV 值,法线和支持超平面。再计算 y_0 到每次迭代获得的 w_i 的距离值,即 $\|y_0-w_i\|^2$ 。

③ $\|y_0-w_i\|^2$ 刚开始时逐渐减小,但随着 i 的增加, $\|y_0-w_i\|^2$ 增大,当发生该情况时,下次迭代的超平面选择在点 $\frac{y_{2i+1}+y_{2i+3}}{2}$ 获得。

④直到 $\|w_i-w_{i+1}\|\leqslant\varepsilon$ 或达到一定的迭代次数,获得最优解 $y^*=[x^*\ \ TV(x^*)]$,PES-TV 算法终止,x^* 即为 $f(n+1)$,执行步骤(5),否则继续执行子步骤①。

(5)重复步骤(2)、(3)和(4),直到满足终止条件。

1.5　实验验证

1.5.1　仿真实验　采用 Shepp-logan 标准头部图像,数据大小为 256×256。在 360°范围内每间隔 15°、6°、5°均匀采样,分别获取 24、60 和 72 个角度的投影数据,将入射光子数目设定为 $I_0=1.0\times10^5$ 。采用 MATLAB R2014a 软件,分别采用 CPTV 算法、TV-POCS 算法和基于交替投影的重建算法对头部图像进行重建,均迭代 1 000 次,并比较不同算法对不同角度投影图像重建后的均方根误差(root mean square error, RMSE)。

1.5.2　小鼠脊椎轴位图像重建　将小鼠脊椎轴位图像经机器重建后的图像作为原图像,大小为 256×256。采用 MATLAB R2014a 软件,分别采用 TV-POCS 算法和本文重建算法对原图像进行重建,均迭代 1 000 次,并比较两种算法的归一化均方距离(d)和归一化平均绝对距离(r):

$$d=[\sum_i(t_i-r_i)^2/\sum_i(t_i-\overline{t})^2]^{1/2}\tag{13}$$

$$r=\sum_i|t_i-r_i|\Big/\sum_i|t_i|\tag{14}$$

其中, t_i 和 r_i 分别为原始图像向量和重建后图像向量中第 i 个像素的灰度值; $\overline{t}$ 为原始图像的平均像素值。d 和 r 的数值越小,表明重建图像与原始图像越接近,即重建图像的质量越好。

2　结果

Shepp-logan 头部重建图像见图 1。CPTV 算法所

重建的图像平滑性较差,伪影较多,而 TV-POCS 算法和基于交替投影的重建算法不仅有效抑制了噪声,还保护了图像的边缘,图像质量较高。不同算法对不同角度投影图像重建后的 RMSE 比较见图 2。TV-POCS 算法和基于交替投影的重建算法仅迭代 100 次就接近于收敛,而 CPTV 算法迭代 1 000 次才接近收敛。随着迭代次数的增加,基于交替投影的重建算法的 RMSE 比另外两种算法下降速度更快,收敛值更小。

小鼠脊椎轴位图像重建前后的比较见图 3。基于交替投影的重建算法重建的图像较 TV-POCS 算法更接近于原图像。基于交替投影的重建算法重建图像的 d 和 r 值均小于 TV-POCS 算法(0.064 0 vs 0.262 4,0.073 7 vs 0.298 2),故基于交替投影的重建算法优于 TV-POCS 算法。

3　讨论

本文将 CT 图像重建作为凸集优化问题,将重建模型分解为多个约束,并确定其对应的凸集,通过交替投影的方式在多个约束的交集中找到可行解。其中对 TV 先验项构成的凸集的求解,不

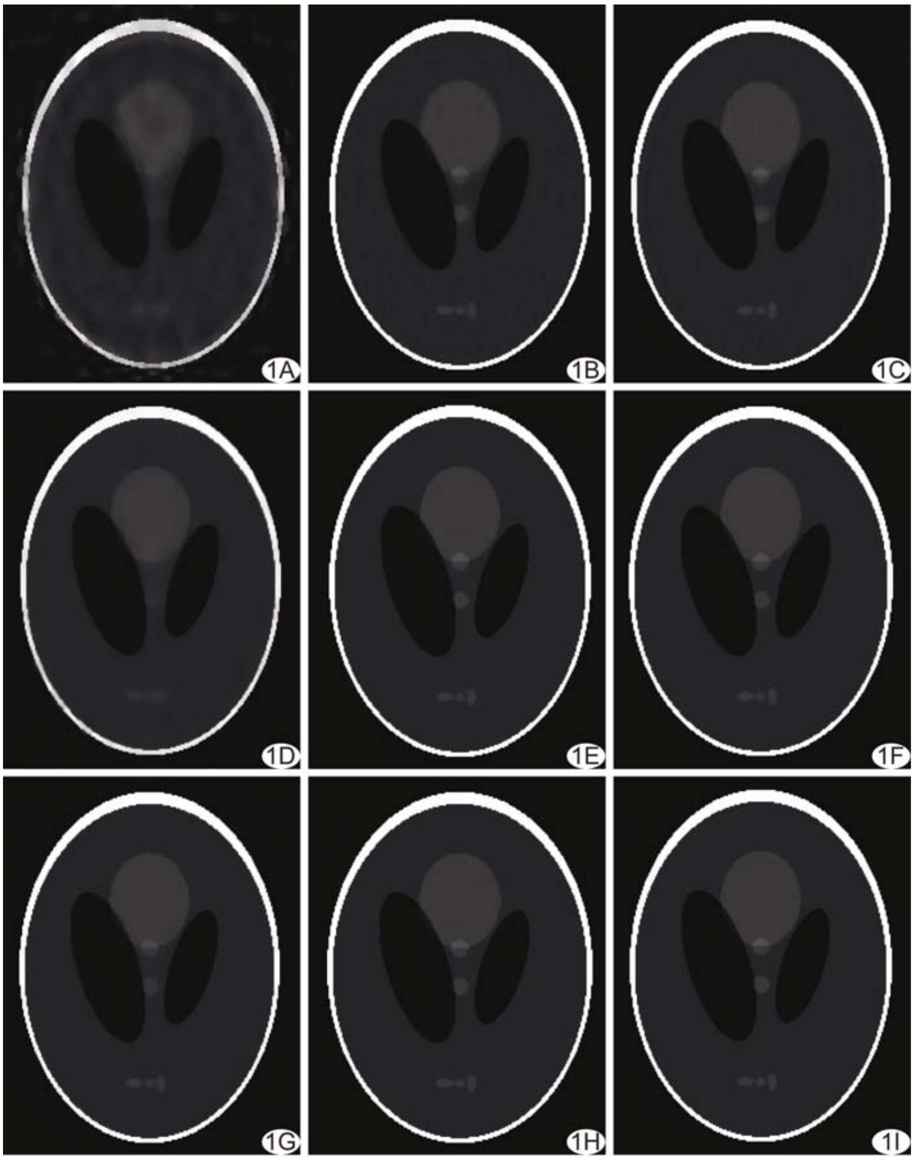

图 1　Shepp-logan 头部重建图像　A～C. CPTV 算法；D～F. TV-POCS 算法；G～I. 基于交替投影的重建算法　(A、D、G 为 24 个投影角度；B、E、H 为 60 个投影角度；C、F、I 为 72 个投影角度)

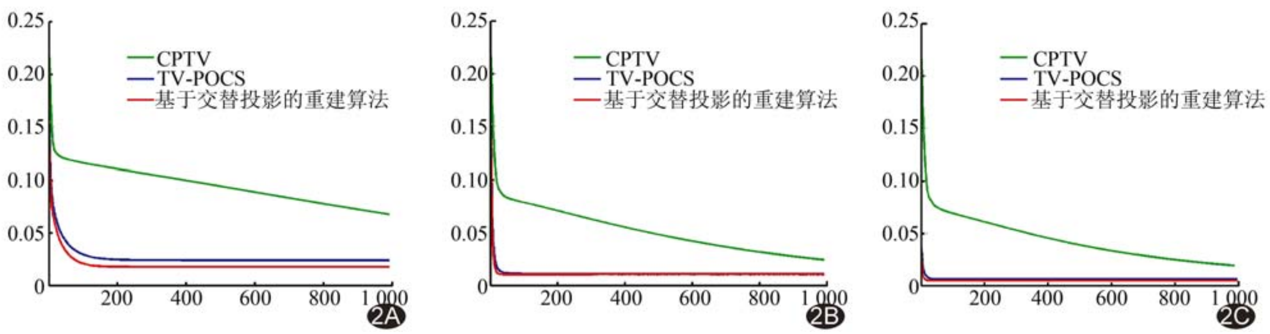

图 2　不同算法对不同角度投影图像重建后的 RMSE 比较　A. 24 个投影角度；B. 60 个投影角度；C. 72 个投影角度

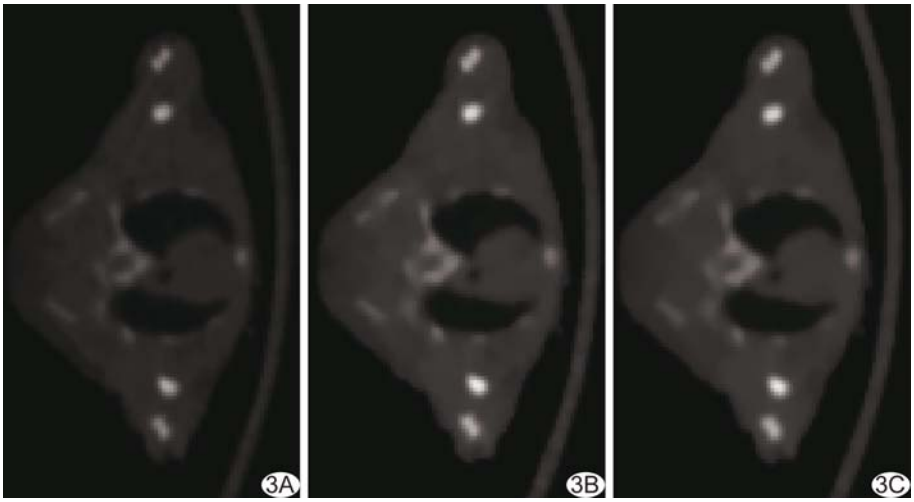

图 3　小鼠脊椎轴位图像重建前后的比较　A.原图像；B.TV-POCS 算法；C.基于交替投影的重建算法

再采用梯度下降法,而是通过定义 TV 函数的上方图集,利用点到这个凸集的切向超平面的连续投影找到起始点到 TV 凸集最近的点,避免了参数估计。与传统的 CPTV 算法和 TV-POCS 算法比较,基于交替投影的重建算法的收敛速度更快,并且有效地抑制了重建图像的噪声,保护了图像的边缘,重建结果更接近于原图像,且不需要参数估计,避免了优化参数对重建图像质量的影响。

基于交替投影的重建算法由两部分组成,即数据一致项凸集和 TV 约束项凸集,该分步式计算可大大简化计算的复杂程度,从而提高收敛速度。对于 TV 函数构成的凸集范围 τ 值的选取,本文未给出理论的选取方式,但笔者通过大量的实验发现,当 τ 取值为原图像的 TV 值时,可获得最好的重建结果,τ 取值过小或过大均会使重建图像过于平滑。一般情况下原图像是未知的,故对于实际的图像重建有一定的制约。但考虑人体除病灶部位,图像差别不大,所以在不知原图像的情况下,可考虑采用相同部位获得的 CT 图像决定 τ 的取值。本研究只进行了仿真实验和小鼠脊椎轴位图像重建,实验数据有限,有待进一步深入研究。

综上所述,采用基于交替投影的重建算法重建有限角度的 CT 投影图像不需参数估计,且图像质量更高,收敛速度更快。

[参考文献]

[1] Jensen TL, Jørgensen JH, Hansen PC, et al. Implementation of an optimal first-order method for strongly convex total variation regularization. BIT Numerical Math, 2011, 52(2): 329-356.

[2] Kudo H, Suzuki T, Rashed EA. Image reconstruction for sparse-view CT and interior CT-introduction to compressed sensing and differentiated backprojection. Quant Imaging Med Surg, 2013,3(3):147-161.

[3] Candès EJ, Romberg JK, Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2006,59(8):1207-1223.

[4] Zou Y, Pan X, Sidky EY. Image reconstruction in regions-of-interest from truncated projections in a reduced fan-beam scan. Physics Med Biol, 2005,50(1):13-27.

[5] LaRoque SJ, Sidky EY, Pan X. Accurate image reconstruction from few-view and limited-angle data in diffraction tomography. J Opt Soc Am A Opt image Sci Vis, 2008,25(7):1772-1782.

[6] Sidky EY, Pan X. Image reconstruction in circular cone-beam computed tomography by constrained, total variation minimization. Phys Med Biol, 2008,53(17):4777-4807.

[7] Sidky EY, Jørgensen JH, Pan X. Convex optimization problem prototyping for image reconstruction in computed tomography with the Chambolle-Pock algorithm. Phys Med Biol, 2012, 57(10):3065-3091.

[8] Sidky EY, Kao CM, Pan X. Accurate image reconstruction from few-views and limited angle data in divergent-beam CT. J X-Ray Sci Technol, 2006,14(20):119-139.

[9] Boyd S, Dattotrro J. Alternating Projections. California: Standford University, 2003.

[10] Michailovich OV. An iterative shrinkage approach to total-variation image restoration. IEEE Trans Image Process, 2011, 20(5):1281-1299.

[11] Tofighi M, Kose K, Cetin AE. Denoising images corrupted by impulsive noise using projections onto the epigraph set of the total variation function (PES-TV). Signal Image & Video Processing, 2015,9(1):41-48.

[12] Stark H, Yang YY. Vector space projections: A numerical approach to signal and image processing, neural nets, and optics. New York: Wiley-Interscience, 1998:57-119.

[13] Jiang M, Wang G. Convergence of the simultaneous algebraic reconstruction technique (SART). IEEE Trans Imag Process, 2003,12(8):957-961.